

基于网络编码的无线网络多流问题研究

周进怡, 夏树涛, 江勇, 郑海涛

(清华大学 深圳研究生院, 深圳 518055)

摘 要: 多流问题研究多对源、宿节点之间所能达到的最大吞吐。在无线网络中, 解决该问题的关键在于量化无线干扰。由于网络编码能够在一定程度上克服无线干扰的影响, 因此通过使用超边来描述编码发送, 并构造关于超边的冲突图, 可以实现对网络编码条件下无线干扰(以协议干扰模型为例)的量化, 进而解决网络编码条件下的多流问题。此外, 针对在超边冲突图中搜集所有极大独立集的 NP 难问题, 提出了一种实用的搜集算法, 并给出了相关的数字结果。

关键词: 多跳无线网络; 多流问题; 最大吞吐; 网络编码; 极大独立集搜集算法

中图分类号: TN92

文献标识码: A

文章编号: 1000-436X(2013)08-0131-09

Research on multiflow in wireless networks based on network coding

ZHOU Jin-yi, XIA Shu-tao, JIANG Yong, ZHENG Hai-tao

(Graduate School at Shenzhen, Tsinghua University, Shenzhen 518055, China)

Abstract: In a multihop wireless network, wireless interference is crucial to the multi-commodity flow problem, which studies the maximum throughput between multiple pairs of sources and sinks. Based on the observation that network coding (NC) could help to decrease the impacts of wireless interference, a framework was proposed to solve the problem for multihop wireless networks with NC. By introducing hyperarcs to model all possible (uncoded or encoded) transmissions and using the conflict graph of hyperarcs to describe the new conflict relations modified by NC (e.g., in the protocol interference model), the problem was formulated to compute the maximum throughput of multiple unicast flows supported by the multihop wireless network with given NC settings, in which the constraints were rebuilt from the conflict graph of hyperarcs. Furthermore, a practical algorithm was proposed to collect maximal independent sets, instead of collecting all maximal independent sets in the conflict graph of hyperarcs (which is NP-hard), and some numerical results were illustrated.

Key words: multihop wireless network; multi-commodity flow problem; maximum throughput; network coding; collecting algorithm for maximal independent sets

1 引言

多流问题^[1] (multi-commodity flow problem) 是一个经典的网络流问题, 它研究多对源、宿节点之间所能达到的最大吞吐。在多跳无线网络中, 解决该问题的关键在于量化无线干扰。Jain 等人^[2]通过构造关于通信链路的冲突图 (conflict graph) 来

对无线干扰进行量化, 他们将基于冲突图建立的约束条件加入到多流问题的规划中, 从而解决了多跳无线网络中的多流问题。通过这种方法, 能够针对任意给定的多跳无线网络中的多个单播流, 计算出吞吐量的最优值(即最大吞吐), 具有很强的实用性。

近年来, 网络编码^[3] (NC, network coding) 被广泛认为是一种能够有效提高网络吞吐的技术。通

收稿日期: 2012-12-15; 修回日期: 2013-03-02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (60972011); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目 (20100002110033); 东南大学移动通信国家重点实验室开放研究基金资助项目 (2011D11)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (60972011); The Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (20100002110033); The Open Research Fund of National Mobile Communications Research Laboratory, Southeast University (2011D11)

过使用网络编码，一个无线节点能够将原本相互干扰的多次发送进行一次性编码发送^[4]。图 1 示范了网络编码的几种典型场景。在图 1(a)中，2 个分组通过一个中继节点 r 进行交互，共需要 4 次无线发送。由于这 4 次发送两两之间均存在干扰冲突，因此必须要经过 4 个时间单位才能完成。若中继节点 r 在收到分组 P_1 和 P_2 后，对它们进行编码后再一次性发送出去，两端的接收节点能够通过译码取得所期望的分组。可见通过网络编码的方式，只需要 3 个时间单位便能够完成整个交互过程。事实上这种传输效率的提高，可以看作是中继节点通过网络编码克服了 2 次发送之间的干扰冲突而达到的效果。图 1(b)示范了使用机会监听^[4]的网络编码场景，2 个分组交叉穿过一个中继节点 r 。在收到分组 P_1 和 P_2 后，中继节点 r 同样可以对它们进行编码后再一次性发送出去，机会监听技术保证了接收节点能够对接收到的编码分组进行成功译码。这也同样可视为是网络编码克服了发送干扰而提高了传输效率。图 1(c)示范了更一般的情况，若中继节点 r 有 n 个邻居节点，在分别收到来自这 n 个邻居节点的 n 个分组后，中继节点可以通过网络编码将最多 n 个分组一次性发送出去。这种情况下，中继节点相当于克服了这 n 次发送之间的干扰，极大地提高了传输效率。可见，无线节点可以通过使用网络编码来达到克服干扰的效果，提高网络吞吐。

基于上述认识，本文以协议干扰模型^[5](protocol interference model) 为例，通过分析和量化网络编码对无线干扰的影响，解决网络编码条件下的多流问题，进而提供一种计算网络编码条件下最大吞吐的实用方法。首先，使用超边来描述每一种可能的编码发送。这些编码发送是基于网络拓扑、每个流可能的传输路径，在满足编、译码条件^[4]的前提下分析得出。由于超边本质上代表了一组（原本相互干扰的）通信链路的集合，并同时体现了网络编码对无线干扰的克服，因此可以通过构造关于超边的冲突图来描述网络编码条件下发生变化的冲突关

系。然后，基于超边冲突图使用图论的方法来搜集独立集，进而确定网络的容量区域。最后，对多流问题进行规划，并将基于容量区域所建立的约束条件加入其中，从而解决网络编码条件下的多流问题。本文所考虑的网络编码是一种本地化的、机会的网络编码^[4]。这种编码可以发生在多个流之间，主要涉及编码节点和编码系数。编码节点就是那些能够进行编码发送的节点，而编码系数则体现了在编码节点上所进行的具体编码操作。本文将编码节点和编码系数视为多流问题的一个输入条件，仅考虑可能产生的发送组合（即超边）。本文的主要贡献概括如下。

- 1) 引入超边来表示所有可能的（编码或未编码的）发送，并通过构造关于超边的冲突图，实现对网络编码条件下无线干扰的量化。
- 2) 结合考虑网络编码和无线干扰（或通信链路的可调度性），提出一种新的无线网络模型。基于这种模型，能够有效地分析网络编码条件下无线网络的吞吐性能。
- 3) 解决网络编码条件下的多流问题，从而能够针对任意给定的网络编码条件、多个单播流和多跳无线网络，计算所能达到的最大吞吐。
- 4) 针对在超边冲突图中搜集所有极大独立集的 NP 难问题，提出了一种实用的搜集算法。

2 相关工作

近年来，计算多跳无线网络的吞吐一直是一个热点研究问题。在没有考虑网络编码的情况下，Gupta 和 Kumar^[5]论证了在一个由 n 个相同节点组成的无线网络中，当随机选择节点位置和通信模式时，每节点的吞吐为 $\theta(1/\sqrt{n \log n})$ ；当节点位置和通信模式均为最优时，每节点的吞吐为 $\theta(1/\sqrt{n})$ 。Jain 等人^[2]通过对多流问题进行规划来研究最大吞吐问题。他们通过建立关于通信链路的冲突图来对无线干扰进行量化，然后将基于该冲突图所构造的约束条件加入到规划中，从而计算出多

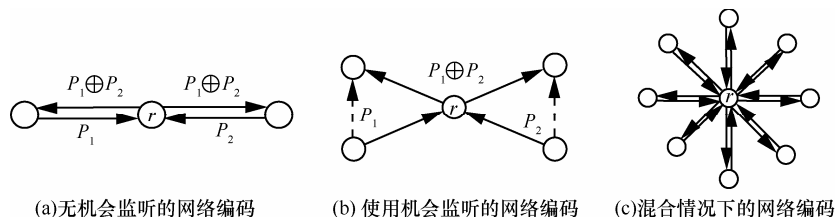


图 1 无线网络编码的典型场景

个单播流在多跳无线网络中所能达到的最大吞吐。Wan^[6]论证了在多跳无线网络中解决多流问题是一个 NP 难问题，并提出了一个多项式近似调度算法。

作为一种新技术，网络编码对无线网络吞吐性能的改善已经在一些最近提出的无线网络架构中得到了体现，如 COPE^[4]、XOR-Sym^[7]。然而计算网络编码条件下无线网络的最大吞吐（增益）仍然是一个挑战。在网络编码条件下，文献[8]论证了在一维和二维随机网络中，网络编码带来的最大吞吐增益分别为 $(1+\Delta)/(1+\Delta/2)$ 和 $2c\sqrt{\pi}(1+\Delta/\Delta)$ ，其中 $c = \max\{2, \sqrt{\Delta^2 + 2\Delta}\}$ ， Δ 代表无线干扰的强度。文献[9]引入了一种网络编码感知的路由机制，并用线性规划的方法来计算最大吞吐，但他们假设已存在最优链路调度。文献[10]通过分析编码数量的上界，来取得最大的吞吐增益。总而言之，以往的研究工作都基于一些不现实的假设：节点的同构性、网络拓扑的随机性、通信模式的一致性、或最优调度条件等。本文通过解决网络编码条件下的多流问题，能够针对任意给定的网络编码设置、单播流和多跳无线网络，计算所能达到的最大吞吐，具有更强的实用性。

3 预备知识

3.1 假设与定义

为了便于描述，本文所述的无线网络假定是在协议干扰模型中的、静态的多跳无线网络，所有节点都是具有全向天线、单信道的无线节点。令 S 为一个有限集合， $|S|$ 代表这个集合的基数。令 \mathbb{R}_+ 表示为非负实数的集合。本文用 $f \in \mathbb{R}_+^S$ 来简化的表示一个从 S 到 \mathbb{R}_+ 的函数。对于任意子集 $S' \subseteq S$ ，定义 $f(S') \triangleq \sum_{e \in S'} f(e)$ 。对于任意 2 个函数， $f, f' \in \mathbb{R}_+^S$ ， $f \circ f' \in \mathbb{R}_+^S$ 定义为 $(f \circ f')(e) = f(e)/f'(e), \forall e \in S$ 。

3.2 干扰模型

本文以协议干扰模型^[5]为例来研究网络编码条件下的多流问题。在协议干扰模型下，无线干扰可以简化为一种二元现象：干扰或者不干扰。一个无线网络由一个有限节点集合 V ，一个发射半径函数 $r \in \mathbb{R}_+^V$ 和一个干扰半径函数 $\rho \in \mathbb{R}_+^V$ 来共同确定，并满足 $\rho(i) \geq r(i), \forall i \in V$ 。令 d_{ij} 为节点 i, j 之间的欧氏距离。在由 V 构成的网络中，存在一条从 i 到 j 的通信链路 (i, j) ，当且仅当它们满足条件

$0 < d_{ij} \leq r(i)$ 。在协议干扰模型中，当两条链路 $(i, j), (i', j')$ 满足 $d_{ij} \leq \rho(i')$ 或 $d_{i'j'} \leq \rho(i)$ 时发生干扰冲突。

3.3 网络模型

本文用 $(V, A, \mathcal{G}, \mathcal{I}, b)$ 来确定一个无线网络 \mathcal{N} ，其中， V 表示该网络的节点集合， A 表示该网络节点之间的通信链路集合， \mathcal{G} 表示关于 A 的冲突图， \mathcal{I} 表示 A 中所有可调度链路集的集合，函数 $b \in \mathbb{R}_+^A$ 表示 A 中所有链路的带宽。详细说明如下。

无线网络 \mathcal{N} 的通信拓扑通常可以由一个有向图 (V, A) 来表示。为了描述 A 中所有链路之间的冲突关系，按如下方式来定义关于 A 的冲突图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 。 \mathcal{V} 代表一个有限点集，其中的点与 A 中的链路为一一对应的关系； \mathcal{E} 代表连接 \mathcal{V} 中这些点的边的集合，而这些边则代表了所连接的 2 个点（对应于 A 中的两条链路）之间的冲突关系。在 2 个点 $v, v' \in \mathcal{V}$ 之间存在一条边 $e \in \mathcal{E}$ ，当且仅当 v, v' 所代表的链路之间是干扰冲突的。在协议干扰模型中的冲突图 \mathcal{G} 体现为一个无向图。若 \mathcal{G} 中的点集 $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ 满足 \mathcal{V}' 中任意的两点之间都没有边相连，则 \mathcal{V}' 为 \mathcal{G} 的一个独立集；若在 \mathcal{V} 中不存在包含 \mathcal{V}' 的独立集，则 \mathcal{V}' 为 \mathcal{G} 的一个极大独立集。当 $A' \subseteq A$ 所对应的 $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ 是一个独立集时， A' 中的所有链路能够同时调度/激活而不会发生干扰冲突。因此，本文把独立集 \mathcal{V}' 所对应的链路集 A' 称为可调度链路集。而 \mathcal{I} 代表了网络 \mathcal{N} 中所有可调度链路集的集合。

3.4 容量区域

对于一个无线网络 $\mathcal{N} = (V, A, \mathcal{G}, \mathcal{I}, b)$ ，现将 A 中的所有链路按照一个固定顺序进行排列并分别编号为 $1, 2, \dots, |A|$ 。对于一个链路集合 $S \subseteq A$ ，它的发生率向量定义为一个长度为 $|A|$ 的二元向量，满足当 A 的第 i 条链路属于 S 时，该向量的第 i 个元素值为 1，反之该元素值为 0。若 \mathcal{P} 是由 \mathcal{I} 中所有可调度链路集的发生率向量所构成的凸包，那么 \mathcal{P} 定义为网络 \mathcal{N} 的可调度多面体（scheduling polytope）。

用 \mathcal{S} 来表示一个比例链路调度^[6]（fractional link schedule）， \mathcal{S} 定义为一组序列 $\{(L_j, \lambda_j) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}_+ : 1 \leq j \leq k\}$ ，其中， k 为正整数且满足 $\sum_{j=1}^k \lambda_j \leq 1$ 。 $\sum_{j=1}^k \lambda_j$ 定义为 \mathcal{S} 的长度。关于 \mathcal{S} 的链路容量函数^[6]（link capacity function） $c_{\mathcal{S}} \in \mathbb{R}_+^A$ 定义为

$$c_S(a) = \sum_{1 \leq j \leq k: a \in L_j} \lambda_j, \forall a \in A \quad (1)$$

对于一个链路要求函数^[6] (link demand function) $d \in \mathbb{R}_+^A$, 若存在一个比例链路调度 S 可以满足 $c_S(a) = d(a), \forall a \in A$, 则称 d 在 \mathcal{N} 中是可行的, 而 S 则是满足 d 的一个比例链路调度。在满足 d 的所有比例链路调度中, 具有最短长度的调度被定义为关于 (\mathcal{N}, d) 的最优比例链路调度^[6] (optimal fractional link schedule)。链路要求函数 d 也可以看成是一个长度为 $|A|$ 的二元向量 $(d(a), a \in A)$ 。无线网络 \mathcal{N} 的容量区域定义为所有可行链路要求函数 d 的集合。从文献[2]中可以得到如下结果。

引理 1 对于无线网络 \mathcal{N} , 它的容量区域等价于它的可调度多面体 \mathcal{P} 。

用 $\delta^{\text{in}}(n)$ 和 $\delta^{\text{out}}(n)$ 分别表示 A 中进入和离开节点 $n \in V$ 的链路集合。对于 2 个不同的节点 $s, t \in V$, 一个从 s 到 t 的流 ($s-t$ 流) 定义为一个函数 $f \in \mathbb{R}_+^A$, 满足

$$f(\delta^{\text{in}}(n)) = f(\delta^{\text{out}}(n)), \forall n \in V \setminus \{s, t\} \quad (2)$$

该 $s-t$ 流 f 的流值定义为

$$\text{val}(f) = f(\delta^{\text{out}}(s)) - f(\delta^{\text{in}}(s)) \quad (3)$$

假设给定 k 组 $\{s_i, t_i\} \subseteq V$, 若用 \mathcal{F}_i 表示所有 $s_i - t_i$ 流的集合, 那么 k 流可以定义为一组流 $\langle f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$, 满足 $f_i \in \mathcal{F}_i, i = 1, 2, \dots, k$ 。对于无线网络 \mathcal{N} 中一个 k 流, 只有在满足 $(\sum_{i=1}^k f_i) \odot b \in \mathcal{P}$ 条件时才是可行的 (可调度的)。因此, 无线网络 \mathcal{N} 中的多流问题可以由如下的线性方程来进行规划^[6]

$$\max \sum_{i=1}^k \text{val}(f_i) \quad (4)$$

$$\text{(LP-I) } s.t. f_i \in \mathcal{F}_i, i = 1, 2, \dots, k \quad (5)$$

$$(\sum_{i=1}^k f_i) \odot b \in \mathcal{P} \quad (6)$$

通过(LP-I)可以计算出无线网络 \mathcal{N} 中一个 k 流所能达到的最大吞吐。

4 网络编码条件下的多流问题

本节旨在解决网络编码条件下的多流问题, 实现针对任意给定的网络编码设置、多个单播流和无线网络, 能够计算所能达到的最大吞吐。

4.1 网络编码条件下的网络模型

若在一个无线网络 $\mathcal{N} = (V, A, \mathcal{G}, \mathcal{I}, b)$ 中启动了

网络编码功能并添加了网络编码设置 (包括编码节点和编码系数), 称对 \mathcal{N} 进行 NC 化。本文用 $\bar{\mathcal{N}}$ 表示 NC 化的 \mathcal{N} 。为了描述网络编码对无线干扰可能造成的影响, 引入超边 (hyperarc) 的概念。若 (i, J) 代表一条超边, 其中, $i \in V, J \subseteq V \setminus i$ 并且满足 $(i, j) \in A, \forall j \in J$ 。那么对于编码节点 $i \in V$, 每一种可能的编码发送均可用一条超边 (i, J) 来表示。本文用 \bar{A} 来表示所有超边的集合, 这样 \bar{A} 便代表了 $\bar{\mathcal{N}}$ 中所有可能的编码发送。显然, $\bar{\mathcal{N}}$ 的通信拓扑可以用 (V, \bar{A}) 表示, 反映出原来的通信拓扑 (V, A) 由于 NC 化而进行了扩展。值得一提的是, 超边 $(i, J), |J|=1$ 实际上代表了一条原始的通信链路或未编码的发送。对于超边 $(i, J) \in \bar{A}$, 链路 $(i, j) \in A, j \in J$ 定义为这条超边的子链路 (表示为 $(i, j) \in (i, J)$)。在协议干扰模型中, 两条超边 $(i, J), (i', J') \in \bar{A}$ 之间发生干扰冲突, 当且仅当在这两条超边的子链路 $(i, j) \in (i, J)$ 和 $(i', j') \in (i', J')$ 之间存在干扰冲突。本文按如下方式来定义关于 \bar{A} 的冲突图 $\bar{\mathcal{G}} = (\bar{V}, \bar{\mathcal{E}})$ 。 \bar{V} 代表一个有限点集, 其中的点与 \bar{A} 中的超边存在一一对应的关系; $\bar{\mathcal{E}}$ 代表连接 \bar{V} 中这些点的边的集合, 而这些边体现了所连接的 2 个点 (对应于 \bar{A} 中的两条超边) 之间的冲突关系。显然, 冲突图 $\bar{\mathcal{G}}$ 是一个无向图并且满足 $|\bar{V}| = |\bar{A}|$ 。若 $\bar{\mathcal{G}}$ 中的点集 $\bar{V}' \subseteq \bar{V}$ 满足 \bar{V}' 中任意两点之间都没有边连接, 则 \bar{V}' 为 $\bar{\mathcal{G}}$ 的一个独立集; 若在 \bar{V} 中不存在包含 \bar{V}' 的独立集, 则 \bar{V}' 为 $\bar{\mathcal{G}}$ 的一个极大独立集。一个独立集 \bar{V}' 所代表的超边集 $\bar{A}' \subseteq \bar{A}$ 称为可调度超边集 (schedulable hyperarc set)。 \bar{A}' 中的所有超边可以通过网络编码的方式同时进行调度/激活而不发生冲突。若用 $\bar{\mathcal{I}}$ 来表示 $\bar{\mathcal{G}}$ 中所有的独立集, 那么它也同时代表了 \bar{A} 中所有的可调度超边集。因此, 用 $(V, \bar{A}, \bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{I}}, b)$ 来表示一个 NC 化的无线网络 $\bar{\mathcal{N}}$ 。注意, 这里的链路带宽函数 $b \in \mathbb{R}_+^A$ 仍然表示了 A 中所有链路的带宽, 相当于 \bar{A} 中所有子链路的带宽。

这里特别说明 \mathcal{N} 与 $\bar{\mathcal{N}}$ 之间的关系。 $\bar{\mathcal{N}}$ 是在 \mathcal{N} 中进行了特定 NC 化后的网络, 而 \mathcal{N} 是 $\bar{\mathcal{N}}$ 的原始网络、或者去 NC 化的网络。二者实际上为同一网络, 区别仅在于是否启用了网络编码功能。在 $\bar{\mathcal{G}}$ 中, 若 $\bar{v} \in \bar{V}$ 代表了某条超边 $(i, J) \in \bar{A}$ 。 (i, J) 或 \bar{v} 的编码权重 (由 $w(i, J)$ 或 $w(\bar{v})$ 表示) 定义为 $|J|$ 或超边 (i, J) 的子链路数目。那么 A 实际上是由 \bar{A} 中所

有编码权重为 1 的超边构成，即 $A = \{(i, J) : (i, J) \in \bar{A}, w(i, J) = 1\} \subseteq \bar{A}$ 。同样可知， $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 是 $\bar{\mathcal{G}} = (\bar{\mathcal{V}}, \bar{\mathcal{E}})$ 的一个子图，其中， $\mathcal{V} \subseteq \bar{\mathcal{V}}$ 是由 $\bar{\mathcal{V}}$ 中所有编码权重为 1 的点构成，而 $\mathcal{E} \subseteq \bar{\mathcal{E}}$ 是由 $\bar{\mathcal{E}}$ 中所有连接 \mathcal{V} 的边构成。此外， $\mathcal{I} \subseteq \bar{\mathcal{I}}$ 是由 $\bar{\mathcal{I}}$ 在 \mathcal{G} 范围内的所有独立集构成。

4.2 网络编码条件下的容量区域

对于一个 NC 化的无线网络 $\bar{\mathcal{N}} = (\mathcal{V}, \bar{A}, \bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{I}}, b)$ 及其原始网络 $\mathcal{N} = (\mathcal{V}, A, \mathcal{G}, \mathcal{I}, b)$ ，若 \mathcal{N} 的可调度多面体为 \mathcal{P} ，根据引理 1 可知 \mathcal{P} 代表了 \mathcal{N} 的容量区域。对于 \mathcal{N} 中的一个 k 流 $\langle f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$ ，只有在满足 $(\sum_{i=1}^k f_i) \odot b \in \mathcal{P}$ 条件时才是可行的（可调度的）。

若 \bar{L} 为 $\bar{\mathcal{N}}$ 中的一个可调度超边集，那么将链路集 $L = \{(i, j) : (i, j) \in \bar{L}, j \in J\} \subseteq A$ 定义为 \bar{L} 的可调度子链路集 (schedulable sub-link set)。本文用 \mathcal{L} 来表示 $\bar{\mathcal{N}}$ 中所有可调度子链路集的集合。若 $\bar{\mathcal{P}}$ 是由 \mathcal{L} 中所有可调度子链路集的发生率向量所构成的凸包，那么将 $\bar{\mathcal{P}}$ 定义为网络 $\bar{\mathcal{N}}$ 的可调度多面体。

用 $\bar{\mathcal{S}}$ 表示一个比例超边调度 (fractional hyperarc schedule)， $\bar{\mathcal{S}}$ 定义为一组序列 $\{(\bar{L}_j, \lambda_j) \in \bar{\mathcal{I}} \times \mathbb{R}_+ : 1 \leq j \leq k\}$ ，其中， k 为正整数且满足 $\sum_{j=1}^k \lambda_j \leq 1$ 。 $\sum_{j=1}^k \lambda_j$ 定义为 $\bar{\mathcal{S}}$ 的长度。将关于 $\bar{\mathcal{S}}$ 的链路容量函数 $c_{\bar{\mathcal{S}}} \in \mathbb{R}_+^A$ 定义为

$$c_{\bar{\mathcal{S}}}(a) = \sum_{1 \leq j \leq k : a \in L_j} \lambda_j, \forall a \in A \quad (7)$$

其中， L_j 是 \bar{L}_j 的可调度子链路集。对于一个链路要求函数 $d \in \mathbb{R}_+^A$ ，若存在一个比例超边调度 $\bar{\mathcal{S}}$ 可以满足 $c_{\bar{\mathcal{S}}}(a) = d(a), \forall a \in A$ ，则称 d 在 $\bar{\mathcal{N}}$ 中是可行的，而 $\bar{\mathcal{S}}$ 则是满足 d 的一个比例超边调度。在满足 d 的所有比例超边调度中，具有最短长度的调度定义为关于 $(\bar{\mathcal{N}}, d)$ 的最优比例超边调度 (optimal fractional hyperarc schedule)。无线网络 $\bar{\mathcal{N}}$ 的容量区域定义为所有可达链路要求函数 d 的集合。类似于引理 1，可以得到如下结果。

定理 1 在协议干扰模型中，对于 NC 化的无线网络 $\bar{\mathcal{N}}$ ，它的容量区域等价于它的可调度多面体 $\bar{\mathcal{P}}$ 。

备注 1 由于篇幅有限，在此处省略了详细的证明过程。结合考虑 $\bar{\mathcal{N}}$ 及其原始网络 \mathcal{N} ，若 \mathcal{P} 、 $\bar{\mathcal{P}}$ 分别为 \mathcal{N} 、 $\bar{\mathcal{N}}$ 的可调度多面体，可以发现

$\mathcal{P} \subset \bar{\mathcal{P}}$ 。根据引理 1 和定理 1， \mathcal{P} 和 $\bar{\mathcal{P}}$ 都是由所有可调度链路集的发生率向量所构成的凸包（对于 $\bar{\mathcal{P}}$ 是以可调度子链路集的形式）。其中， \mathcal{N} 中的可调度链路集是由 \mathcal{I} 直接指出，而 $\bar{\mathcal{N}}$ 中的可调度链路集则是由 $\bar{\mathcal{I}}$ 间接指出（需要通过从超边到子链路的转换）。 \mathcal{N} 的任意可调度链路集在 $\bar{\mathcal{N}}$ 中仍然可调度。而对于 $\bar{\mathcal{N}}$ 中那些包含了（具有多条子链路）超边的可调度超边集，其对应的可调度子链路集在 \mathcal{N} 中是不可调度的。

在 NC 化的无线网络 $\bar{\mathcal{N}}$ 中，当一个 k 流满足 $(\sum_{i=1}^k f_i) \odot b \in \bar{\mathcal{P}}$ 时，则称该 k 流在 $\bar{\mathcal{N}}$ 中是可行的（可调度的）。因此， $\bar{\mathcal{N}}$ 中的多流问题可以由如下的线性方程来进行规划：

$$\max \sum_{i=1}^k \text{val}(f_i) \quad (8)$$

$$\text{(LP-II) s.t. } f_i \in \mathcal{F}_i, i = 1, 2, \dots, k \quad (9)$$

$$(\sum_{i=1}^k f_i) \odot b \in \bar{\mathcal{P}} \quad (10)$$

通过(LP-II)可以计算出在 NC 化的无线网络 $\bar{\mathcal{N}}$ 中一个 k 流所能达到的最大吞吐。而备注 1 中所述的 $\mathcal{P} \subset \bar{\mathcal{P}}$ 表明：网络编码可以扩展无线网络的容量区域，从而提高网络可能的最大吞吐。

4.3 一个例子

图 2 和图 3 示范了一个 NC 化无线网络的例子（协议干扰模型）。在图 2 中分别给出了这个无线网络原始的通信拓扑及其冲突图。在图 3 中分别给出了这个无线网络在 NC 化之后的通信拓扑及（超边）冲突图。这里所有的链路带宽都假定为 1。

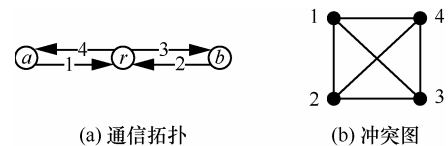


图 2 原始无线网络

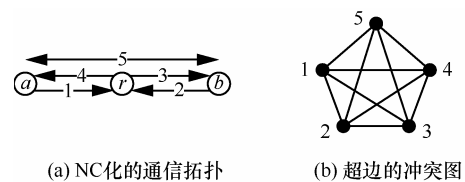


图 3 NC 化的无线网络

假设这个无线网络 $\mathcal{N} = (\mathcal{V}, A, \mathcal{G}, \mathcal{I}, b)$ 中存在 2 个流 $\{a, b\}$ 和 $\{b, a\}$ ，其中， $\mathcal{V} = \{a, r, b\}$ ， $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ， $\mathcal{I} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ 。 \mathcal{N} 的容量区域 \mathcal{P} 是由 4 个发生率向量(1000), (0100), (0010), (0001)所构

成的凸包。通过对这个多流问题进行规划，可以计算出它的最大吞吐为 1/2。比如，2 个流的流值均为 1/4，对应的最优比例链路调度为 $\mathcal{S} = \{\{1,1/4\}, \{2,1/4,3,1/4\}, \{4,1/4\}\}$ 。

若对 \mathcal{N} 进行 NC 化 (r 为编码节点)，那么这个被 NC 化的网络可以表示为 $\bar{\mathcal{N}} = (V, \bar{A}, \bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{I}}, b)$ ，其中， $\bar{A} = \{1,2,3,4,5\}$ ， $\bar{\mathcal{I}} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$ 。注意，这里 \bar{A} 中的 5 代表一条超边、或一次编码发送 $(r, \{a, b\})$ ，它的子链路集合为 $(r, b)(r, a)$ 或 $\{3, 4\}$ 。此时， $\bar{\mathcal{N}}$ 的所有可调度子链路集为 $\mathcal{L} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}\}$ ，而其容量区域 $\bar{\mathcal{P}}$ 是由 5 个发生率向量 (1000), (0100), (0010), (0001), (0011) 所构成的凸包。通过对这个多流问题进行规划，可以计算出它的最大吞吐为 2/3。比如，2 个流的流值均为 1/3，对应的最优比例超边调度为 $\bar{\mathcal{S}} = \{\{1,1/3\}, \{2,1/3\}, \{5,1/3\}\}$ 。

通过这个例子发现，当无线网络 \mathcal{N} 被 NC 化为 $\bar{\mathcal{N}}$ 之后，它的最大吞吐从 1/2 提高到了 2/3。

5 一种确定容量区域的方法

在上一节中，结合考虑了网络编码对无线干扰的影响，本文用规划的方法解决了网络编码条件下的多流问题，可以计算出网络编码条件下无线网络所能达到的最大吞吐。但是这种方法仍然存在一个现实问题，那就是确定网络的容量区域。在本节中提出了一种解决该方法的方法。

考虑一个 NC 化的无线网络 $\bar{\mathcal{N}} = (V, \bar{A}, \bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{I}}, b)$ 及其原始网络 $\mathcal{N} = (V, A, \mathcal{G}, \mathcal{I}, b)$ 。在 $\bar{\mathcal{N}}$ 中存在一个 k 流 $\langle f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$ ，其中每个流 $f_i, i=1, 2, \dots, k$ 由 $\{s_i, t_i\} \subseteq V$ 确定。对于 $\bar{\mathcal{N}}$ 所支持的 k 流，其所能达到的最大吞吐，实际上是对应多流问题(LP-II)的一个最优值。而这个最优值的取得，依赖于 $\bar{\mathcal{N}}$ 的容量区域。若 $\bar{\mathcal{P}}$ 代表了 $\bar{\mathcal{N}}$ 的容量区域，那么 $\bar{\mathcal{P}}$ 是由 $\bar{\mathcal{N}}$ 中所有可调度子链路集 (即： \mathcal{L}) 的发生率向量所构成的凸包。而 \mathcal{L} 的取得，要求搜集 $\bar{\mathcal{G}}$ 中所有的独立集。众所周知，在一个无向图中搜集所有的 (极大) 独立集是一个 NP 难问题^[11]。可见获得 $\bar{\mathcal{N}}$ 的完整容量区域 $\bar{\mathcal{P}}$ 实际上也是一个 NP 难问题。这样使得在构造(LP-II)的约束(10)时会出现很高的复杂度。本节提出一个多项式复杂度的极大独立集搜索算法，以确定一个近似的容量区域，从而满足构造(LP-II)约束(10)的要求。本文按照如下步骤取得一

个极大独立集的集合 $\bar{\mathcal{T}} \subseteq \bar{\mathcal{I}}$ ，进而确定容量区域 $\bar{\mathcal{P}}' \subseteq \bar{\mathcal{P}}$ 。

步骤 1 计算路由。使用著名的最短增广路径算法^[12] (shortest augmenting path algorithm) 来为 k 流中的每个流 f_i 计算从 s_i 到 t_i 的一组路径 $P_j^i = P_1^i, P_2^i, \dots, P_{p_i}^i$ ，其中， P_j^i 代表了流 f_i 的第 j 条路径，而 P^i 代表了流 f_i 的路径总数。显然 P_j^i 是一组首尾相接的有序链路集合。用 B_j^i 来表示 P_j^i 的路径带宽，即 P_j^i 中每条链路被该路径所占用的链路带宽。需要注意的是，该算法本身并不会考虑到网络编码的影响，而是基于原始网络 \mathcal{N} 来计算路径，运行时间为 $O(|V|^2|A|)$ 。

步骤 2 对超边进行优先级处理。首先，按如下公式为每条通信链路 $a \in A$ 进行赋值：

$$Pr(a) = \sum_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq p_i, a \in P_j^i} B_j^i, \forall a \in A \quad (11)$$

其中， $a \in P_j^i$ 表示链路 a 在流 f_i 的第 j 条路径上。显然 $Pr(a)$ 体现了链路 a 可能的使用率情况。然后，基于 A 中通信链路的赋值，按如下公式对所有超边 $\bar{a} \in \bar{A}$ 进行赋值：

$$Pr(\bar{a}) = w(\bar{a}) \min_{a \in \bar{a}} Pr(a), \forall \bar{a} \in \bar{A} \quad (12)$$

其中， $w(\bar{a})$ 代表超边 \bar{a} 的编码权重或子链路数目。把满足 $Pr(\bar{a}) > 0$ 的超边 \bar{a} 称为有效超边，而所有的有效超边构成了有效超边集。最后，将 $Pr(\bar{a})$ 定义为超边 $\bar{a} \in \bar{A}$ 的优先级，体现了 $\bar{\mathcal{N}}$ 中的每条超边对于支持 k 流可能起到的不同作用。

步骤 3 搜集极大独立集。这里提出了一种名为 MISC (maximal independent sets collecting) 的独立集搜索算法 (如图 4 所示)。在 $\bar{\mathcal{N}}$ 的冲突图 $\bar{\mathcal{G}} = (\bar{\mathcal{V}}, \bar{\mathcal{E}})$ 中，由于 $\bar{v} \in \bar{\mathcal{V}}$ 与 $\bar{a} \in \bar{A}$ 存在一一对应的关系，因此每个点 $\bar{v} \in \bar{\mathcal{V}}$ 可以得到对应的优先级赋值 $Pr(\bar{v}) = Pr(\bar{a})$ 。将所有 $\bar{v} \in \bar{\mathcal{V}}$ 按优先级进行降序排列，得到一个点序 $\langle v_1, v_2, \dots, v_{|\bar{\mathcal{V}}}|} >$ (表示为 $\bar{\Gamma}$)。在 MISC 算法中，将所有满足 $Pr(\bar{v}) > 0$ 的点 (对应于有效超边) 定义为锚点，所有锚点构成了锚点集 $\bar{\mathcal{V}}' \in \bar{\mathcal{V}}$ (对应于有效超边集)。MISC 算法按照点序 $\bar{\Gamma}$ 依次从每个锚点出发进行极大独立集搜集。

MISC 算法的输入为：冲突图 $\bar{\mathcal{G}} = (\bar{\mathcal{V}}, \bar{\mathcal{E}})$ 、点序 $\bar{\Gamma}$ 、以及锚点集 $\bar{\mathcal{V}}'$ 。该算法的所有操作都严格按照点序 $\bar{\Gamma}$ 进行。基于点序 $\bar{\Gamma}$ 和锚点数 $|\bar{\mathcal{V}}'|$ ，MISC 算法能够极大地限制所搜集独立集的总量，同时保

证优先级越高的点 $\bar{v} \in \bar{\mathcal{V}}$ 会被越多的独立集所包含。在算法中, 用 $\bar{v} \succ \bar{v}'$ 来表示 \bar{v} 的优先级低于 \bar{v}' 、或 \bar{v} 在 $\bar{\mathcal{I}}$ 中位于 \bar{v}' 之后。用 $\bar{\mathcal{I}}[\bar{v}']$ 结构来存储从锚点 \bar{v}' 出发搜集到的所有独立集。在算法的末段, 将搜集到的所有独立集 $\bar{\mathcal{I}}[\bar{v}'], \forall \bar{v}' \in \bar{\mathcal{V}}$ 进行极大化处理, 转变成极大独立集。MISC 算法最终输出一个极大独立集的集合 $\bar{\mathcal{I}}$ 。

根据 $\bar{\mathcal{I}}$ 能够得到一个近似的容量区域 $\bar{\mathcal{P}}'$, 然后用 $\bar{\mathcal{P}}'$ 代替(LP-II)中的 $\bar{\mathcal{P}}$ 来进行计算, 最终得到在 $\bar{\mathcal{N}}$ 中 k 流所能达到最大吞吐的近似值。可以发现, 这种方法的复杂度主要取决于步骤 1 和步骤 3, 它们的运行时间分别为 $O(|\mathcal{V}|^2|A|)$ 和 $O(|\bar{\mathcal{A}}|^3)$ 。对于一个连通的 NC 化无线网络 $\bar{\mathcal{N}}$, 它的全局运行时间为 $O(|\bar{\mathcal{A}}|^3)$ 。在下一节中, 会通过一些数字结果来展现使用该方法所能达到的计算效果。

Algorithm 1 极大独立集搜索算法(MISC)

Require: 一个冲突图 $\bar{\mathcal{G}} = (\bar{\mathcal{V}}, \bar{\mathcal{E}})$, 一个关于 $\bar{\mathcal{V}}$ 的点序 $\bar{\mathcal{I}}$, 一个锚点集 $\bar{\mathcal{V}}' \subseteq \bar{\mathcal{V}}$

Ensure: 一个关于 $\bar{\mathcal{G}}$ 的极大独立集的集合 $\bar{\mathcal{I}}$

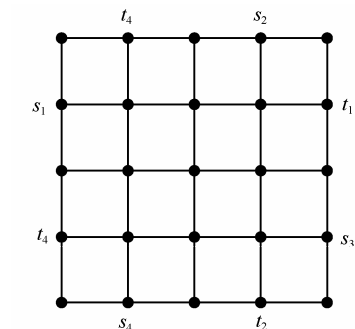
- 1) 初始化: $\bar{\mathcal{I}} \leftarrow \emptyset$;
- 2) for all 锚点 $\bar{v}' \in \bar{\mathcal{V}}'$ do
- 3) for all 点 $\bar{v} \in \bar{\mathcal{V}}', \bar{v} \succ \bar{v}'$ do
- 4) for all 独立集 $\bar{A} \in \bar{\mathcal{I}}[\bar{v}']$ do
- 5) if \bar{v} 不与 \bar{A} 中的任意点发生冲突 then
- 6) 将 \bar{v} 加入 \bar{A}
- 7) break;
- 8) end if
- 9) end for
- 10) if \bar{v} 没有加入任意 $\bar{A} \in \bar{\mathcal{I}}[\bar{v}']$ and 不与 \bar{v}' 发生冲突 then
- 11) 将一个新的独立集 $\{\bar{v}', \bar{v}\}$ 加入 $\bar{\mathcal{I}}$;
- 12) end if
- 13) end for
- 14) end for
- 15) for all 独立集 $\bar{A} \in \bar{\mathcal{I}}$ do
- 16) 将 \bar{A} 中所有的独立集改造为极大独立集: 依次尝试将 $\bar{v} \in \bar{\mathcal{V}}$ 插入
- 17) end for
- 18) 输出 $\bar{\mathcal{I}}$

图 4 MISC 算法

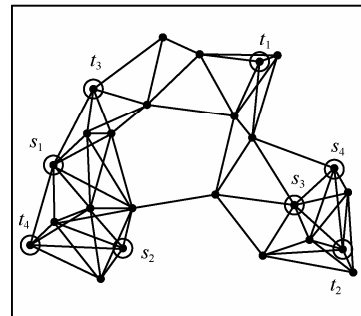
6 数字结果

基于本文所提出的计算最大吞吐的方法, 本节示范了相关的数字结果, 主要在 2 个方面进行对比: 1) 在 NC 化的无线网络与其原始网络的最大吞吐之间; 2) 在基于 MISC 算法和基于全部极大独立集 (NP 难问题) 得到的最大吞吐之间。

本文分别在 2 个无线网络中进行了计算: 1) 一个 5×5 的标准方格网络 (如图 5(a)所示)。由部署在 $1\,000\text{ m} \times 1\,000\text{ m}$ 区域中的 25 个节点构成, 其中每个方格区域为 $200\text{ m} \times 200\text{ m}$ 。这个网络中所有通信链路的带宽均为 1 Mbit/s , 所有节点的发送半径和干扰半径均为 250 m , 因此每个节点有最多 4 个邻居节点、或者干扰到最多 4 个邻居节点。2) 一个随机网络 (如图 5(b)所示)。这个网络是将 25 个节点随机分布在 $750\text{ m} \times 750\text{ m}$ 区域内所形成的连通网络。所有的链路带宽在 $1 \sim 11\text{ Mbit/s}$ 之间随机选取, 所有节点的发送半径和干扰半径分别设置为 200 m 和 300 m 。在每个网络中设置 4 个流 $f_i, i=1, \dots, 4$, 每个流的源节点和目标节点分别由 s_i 和 t_i 表示。



(a) 5×5 无线方格网络



(b) 无线随机网络

图 5 两类无线网络

用 C 语言实现了相关算法, 并用 CPLEX^[13]来解线性规划问题(LP-I)和(LP-II)。为了便于表述, 用“NC-optimal”和“non-NC-optimal”分别描述在使用和不使用网络编码条件下, 基于全部极大独立集计算出来的最大吞吐; 用“NC-MISC”和“non-NC-MISC”分别描述在使用和不使用网络编码条件下, 基于 MISC 算法计算出来的近似最大吞吐。

在图 6 和图 7 中分别示范了在方格无线网络和随机无线网络中取得的数字结果。其中的

NC-optimal 曲线和 NC-MISC 曲线都反映了在启用不同数量编码节点的情况下所得到的最大吞吐。通过如下方式来取得各自曲线上与 $0 \leq K \leq 25$ 对应的点。在 25 个节点中随机选取 K 个节点作为编码节点，并计算出对应的最大吞吐，通过多次反复的计算取得一个关于最大吞吐的平均值，作为与 K 个编码节点所对应的最大吞吐。通过图 6 和图 7 可以发现如下内容。

1) 在 2 个网络中, NC-optimal 曲线和 NC-MISC 曲线都会随着编码节点数量的增加而上升, 说明网络编码对于网络吞吐的增益上界会随着编码节点数量的增加而提升。同时, 极大独立集的数量会随着编码节点数量的增加而增加。

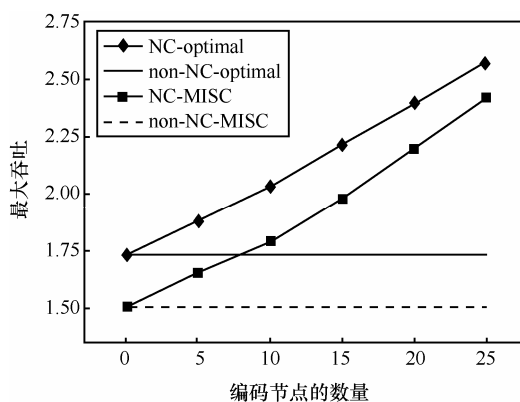


图 6 在方格无线网络中取得的数字结果

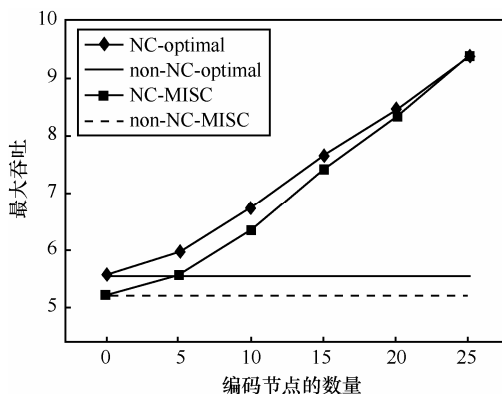


图 7 在随机无线网络中取得的数字结果

2) 在 2 个网络中, 虽然 NC-MISC (包含 non-NC-MISC) 曲线离 NC-optimal (包含 non-NC-optimal) 曲线有一定差距, 但是相对于 NC-optimal 而言, NC-MISC 只需要花费很短的时间来搜集少量极大独立集便可完成计算。例如在随机网络中, NC-optimal 需要花费几天时间来搜集最多 1 627 878 个极大独立集来取得最优结果, 而在相同的条件下 NC-MISC

仅需要几十秒钟便可搜集到最多 51 803 个极大独立集来取得近似结果。

3) MISC 算法 (non-NC-MISC 或 NC-MISC) 在随机网络中的效果要好于在方格网络中的效果。尤其是当编码节点数量较大时, NC-MISC 曲线会非常接近 NC-optimal 曲线。对于在 2 个网络中所表现出来的性能差异, 有如下解释。MISC 算法的性能主要取决于对链路 (超边) 的优先级处理, 而这种优先级的赋予源自于对其潜在使用率的判断, 在方格网络中所有的链路带宽均设置为相同的 1 Mbit/s, 这种相同带宽的设置会削弱优先级处理的效果 (式(11)和式(12)), 从而降低 MISC 算法的性能。而在随机网络中, 由于采用了随机的链路带宽设置, 使得 MISC 算法能够体现出更好的性能。

7 结束语

在多跳无线网络中, 网络编码能够在一定程度上克服无线干扰的影响, 基于这个认识, 本文通过使用超边来描述编码发送、并构造关于超边的冲突图, 实现了对网络编码条件下无线干扰 (以协议干扰模型为例) 的量化, 解决了网络编码条件下的多流问题, 从而提供了一种计算网络编码条件下最大吞吐的实用方法。此外, 针对在超边冲突图中搜索所有极大独立集的 NP 难问题, 本文提出了一种 MISC 搜索算法, 并以方格无线网络和随机无线网络为例给出了一系列数字结果。从数字结果中发现基于 MISC 搜索算法, 可以取得较好的计算效果。

本文所提出的方法, 适用于那些能够用冲突图来量化无线干扰的各类模型, 如单位圆盘图模型、802.11 模型等。而在衰落信道类模型下, 如物理干扰模型, 由于无线干扰的非二元性和可累加性, 难以用简单的冲突图来进行量化, 因此不能直接使用本文的方法, 对此笔者将会展开进一步的研究。

参考文献:

[1] CHAVTAL V. Linear Programming[M]. New York, USA: W H Freeman and Company, 1983.
 [2] JAIN K, PADHYE J, PADMANABHAN V N, et al. Impact of interference on multi-hop wireless network performance[J]. ACM/Springer Wireless Networks, 2005, 11: 471-487.
 [3] AHLSEWEDE R, CAI N, LI S R, et al. Network information flow[J].

IEEE Transactions on Information Theory, 2000, 46(4): 1204-1216.

- [4] KATTI S, RAHUL H, HU W, *et al.* XORs in the air: practical wireless network coding[J]. IEEE/ACM Transactions on Networking, 2008, 16(3): 497-510.
- [5] GUPTA P, KUMAR P R. The capacity of wireless networks[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2000, 46(2): 388-404.
- [6] WAN P J. Multiflows in multihop wireless networks[A]. ACM MOBIHOC[C]. New Orleans, USA, 2009. 85-94.
- [7] CHAPORKAR P, PROUTIERE A. Adaptive network coding and scheduling for maximizing throughput in wireless networks[A]. ACM MOBICOM[C]. Montreal, Canada, 2007. 135-146.
- [8] LIU J, GOECKEL D, TOWSLEY D. Bounds on the gain of network coding and broadcasting in wireless networks[A]. IEEE INFOCOM[C]. Anchorage, USA, 2007. 724-732.
- [9] SENGUPTA S, RAYANCHU S, BANERJEE S. An analysis of wireless network coding for unicast sessions: the case for coding-aware routing[A]. IEEE INFOCOM[C]. Anchorage, USA, 2007. 1028-1036.
- [10] LE J, LUI J, CHIU D M. How many packets can we encode? - an analysis of practical wireless network coding[A]. IEEE INFOCOM[C]. Phoenix, USA, 2008. 371-375.
- [11] GAREY M R, JOHNSON D S. Computers and Intractability: a Guide to the Theory of NP Completeness[M]. New York, USA: W H Freeman and Company, 1979.
- [12] AHUJA R K, MAGNANTI T L, ORLIN J B. Network flows: Theory, Algorithms, and Applications[M]. New Jersey, USA: Prentice Hall, 1993.
- [13] IBM ILOG CPLEX optimizer[EB/OL]. <http://www-01.ibm.com/software/integration/optimization/cplex-optimizer>. 2012.

.....
(上接第 130 页)

- [17] PULAKKA H, LAAKSONEN L, VAINIO M. Evaluation of an artificial speech bandwidth extension method in three languages[J]. IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing, 2008, 16(6): 1124-1137.
- [18] LIU X, BAO C C, JIA M S. Nonlinear bandwidth extension based on nearest-neighbor matching[A]. APSIPA ASC 2010[C]. Singapore, 2010. 169-172.

作者简介:



张丽燕 (1983-), 女, 山东烟台人, 北京工业大学硕士生, 主要研究方向为音频频带扩展。

作者简介:



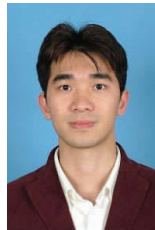
周进怡 (1979-), 男, 湖南娄底人, 清华大学博士生, 主要研究方向为网络体系结构、无线网络编码等。



夏树涛 (1972-), 男, 辽宁大连人, 博士, 清华大学教授、博士生导师, 主要研究方向为编码理论与应用等。



江勇 (1975-), 男, 重庆人, 博士, 清华大学副教授, 主要研究方向为计算机网络体系结构和下一代互联网技术等。



郑海涛 (1978-), 男, 广东湛江人, 博士, 清华大学副教授, 主要研究方向为网络科学、语义网及信息检索等。



鲍长春 (1965-), 男, 蒙古族, 内蒙古赤峰人, 博士, 北京工业大学教授、博士生导师, 主要研究方向为语音与音频信号处理。

刘鑫 (1986-), 男, 北京人, 北京工业大学博士生, 主要研究方向为音频频带扩展。

张兴涛 (1986-), 女, 河北保定人, 北京工业大学硕士生, 主要研究方向为音频频带扩展。